

DANIEL VLĂDUCU
MÁRTA KÁSA

MEMORATOR DE MATEMATICĂ

pentru clasele IX-XII

Ediția a IV-a

Editura Paralela 45

Redactare: Daniel Mitran

Tehnoredactare & pregătire de tipar: Marius Badea

Design copertă: Mirona Pintilie

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României

VLĂDUCU, DANIEL

Memorator de matematică pentru clasele IX-XII /

Daniel Vlăducu, Márta Kása. – Ed. a 4-a. –

Pitești : Paralela 45, 2025

ISBN 978-973-47-4249-3

I. Kása, Márta

51

Copyright © Editura Paralela 45, 2025

Prezenta lucrare folosește denumiri ce constituie mărci înregistrate, iar conținutul este protejat de legislația privind dreptul de proprietate intelectuală.

CUPRINS

ALGEBRĂ	9
1. Formule de calcul prescurtat	9
2. Sume remarcabile	9
3. Modulul	10
4. Partea întreagă, partea fracționară.....	11
5. Inegalități remarcabile	11
6. Elemente de logică matematică, mulțimi	13
7. Inducție matematică, probleme simple de numărare	14
8. Puteri și radicali	14
9. Logaritmi	15
10. Progresii aritmetice, progresii geometrice.....	16
11. Elemente de combinatorică.....	17
12. Binomul lui Newton.....	18
13. Funcții, funcția de gradul I.....	18
14. Ecuația de gradul al II-lea	20
15. Funcția de gradul al II-lea	21
16. Funcții injective, surjective, bijective	24
17. Funcția putere, funcția radical, ecuații	24
18. Funcția exponențială, funcția logaritmică	25
19. Funcții trigonometrice.....	26
20. Matematici financiare	27
21. Elemente de statistică.....	28
22. Probabilitate.....	29
23. Variabile aleatoare	31
24. Numere complexe sub formă algebrică.....	31

25. Aplicații în geometria plană	33
26. Forma trigonometrică a unui număr complex, operații, ecuații, aplicații	33
27. Permutări	34
28. Determinanți	35
29. Inversa unei matrice	35
30. Rangul unei matrice	36
31. Sisteme liniare	36
32. Legi de compoziție	38
33. Structuri algebrice	39
34. Inele de polinoame	41
35. Polinoame cu coeficienți complecși	43
TRIGONOMETRIE	45
1. Elemente de trigonometrie	45
2. Formule trigonometrice	46
3. Aplicații ale trigonometriei și produsului scalar a doi vectori în geometria plană	48
ANALIZĂ MATEMATICĂ	51
I. ȘIRURI	51
1. Șiruri monotone	51
2. Șiruri mărginite	51
3. Limita unui șir	51
4. Șiruri convergente	52
5. Convergență și mărginire	53

6. Criterii de convergență/divergență a șirurilor	53
7. Operații cu șiruri convergente	54
8. Cazuri de trecere la limită rezolvate	55
9. Cazuri de nedeterminare (exceptate)	57
10. Limite remarcabile de șiruri.....	57
II. LIMITE DE FUNCȚII	58
1. Limita unei funcții într-un punct.....	58
2. Limite laterale.....	58
3. Limite remarcabile.....	59
III. FUNCȚII CONTINUE	61
1. Noțiuni generale	61
2. Clase de funcții continue	61
3. Proprietățile funcțiilor continue	61
IV. FUNCȚII DERIVABILE.....	63
1. Noțiuni generale	63
2. Clase de funcții derivabile	63
3. Reguli de derivare.....	64
4. Derivata unei funcții compuse	64
5. Derivata unei funcții inverse.....	64
6. Derivatele funcțiilor elementare și compuse.....	65
7. Studiul funcțiilor cu ajutorul derivatelor.....	67
Teorema lui Fermat	67
Teorema lui Rolle.....	67
Teorema lui Cauchy	67
Teorema lui Lagrange	68
Teorema lui Darboux	69

Regula lui l'Hospital	69
8. Convexitate și concavitate. Puncte de inflexiune.....	70
9. Puncte unghiulare și puncte de întoarcere.....	71
10. Asimptote	71
Asimptote orizontale	71
Asimptote verticale	71
Asimptote oblice	72
V. PRIMITIVE	73
1. Noțiuni generale	73
2. Integrala nedefinită.....	73
3. Clase de funcții care admit primitive.....	74
4. Integrare. Metode de integrare.....	74
Metoda de integrare prin părți.....	74
Metoda schimbării de variabilă	75
5. Primitive uzuale.....	75
Primitivele funcțiilor elementare	75
VI. INTEGRALE DEFINITE	78
1. Diviziuni.....	78
2. Sume Darboux, sume Riemann	79
3. Integrala definită.....	80
Funcții integrabile în sens Riemann	80
4. Clase de funcții integrabile	80
5. Proprietăți ale integralelor definite	81
Proprietatea de liniaritate	81
Proprietatea de monotonie.....	81
Proprietăți ale integralei ca funcție de interval	82

6. Formula Leibniz-Newton	82
7. Formula de medie	82
8. Formula de integrare prin părți	82
9. Formula schimbare de variabilă.....	83
10. Aplicații ale integralelor definite	83
GEOMETRIE VECTORIALĂ ÎN PLAN ȘI ÎN SPAȚIU	85
I. VECTORI LEGAȚI.....	85
1. Noțiuni generale	85
Direcție.....	85
Sens.....	85
Lungime	85
2. Vectori legați echipolenți.....	86
3. Raportul în care un punct împarte un segment orientat....	86
II. VECTORI LIBERI.....	87
1. Noțiuni generale	87
2. Operații cu vectori liberi.....	87
Adunarea vectorilor liberi	87
Scăderea vectorilor liberi	88
Înmulțirea unui vector liber cu un număr real	88
3. Vectorul de poziție	89
4. Vectori paraleli	90
5. Lungimea unui vector liber în plan.....	90
6. Produsul scalar a doi vectori liberi în plan.....	91
7. Lungimea unui vector liber în spațiu	92
8. Produsul scalar a doi vectori liberi în spațiu	92

GEOMETRIE ANALITICĂ ÎN PLAN ȘI ÎN SPAȚIU	93
REPER CARTEZIAN ÎN PLAN ȘI ÎN SPAȚIU	93
1. Reperul cartezian	93
2. Distanța dintre două puncte în plan	95

ALGEBRĂ



FORMULE DE CALCUL PRESCURTAT

- $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
- $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$
- $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$
- $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
- $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
- $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1})$, $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$
- $a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \dots + b^{n-1})$, $\forall n \in 2\mathbb{N} + 1$
- $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$
- $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac)$ sau
- $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c) \frac{1}{2} \cdot ((a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2)$;
- $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)((a + b + c)^2 - 3(ab + bc + ac))$;
- $a^3 + b^3 + c^3 = (a + b + c)^3 - 3(a + b)(b + c)(c + a)$.



SUME REMARCABILE

- $\sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

$$\bullet \sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\bullet \sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$



MODULUL

Definiție: Modulul sau valoarea absolută a unui număr real este distanța, pe axa numerelor reale, dintre reprezentarea numărului și origine.

$|x| = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \geq 0 \\ -x, & \text{dacă } x < 0 \end{cases}$ și $|E(x)| = \begin{cases} E(x), & \text{dacă } E(x) \geq 0 \\ -E(x), & \text{dacă } E(x) < 0 \end{cases}$, pentru orice expresie $E(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Proprietăți:

- $|x| \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$;
- $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
- $|x| = |y| \Leftrightarrow x = \pm y$;
- $|x| < c$, $c > 0 \Leftrightarrow x \in (-c; c)$;
- $|x| > c$, $c > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -c) \cup (c; \infty)$;
- $||x| - |y|| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|$; $\exists$ „=” $\Leftrightarrow xy \geq 0$
- $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$;
- $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$, $y \neq 0$;

- $\min(a, b) = \frac{a+b-|a-b|}{2}$ și $\max(a, b) = \frac{a+b+|a-b|}{2}$.



PARTEA ÎNTREAGĂ, PARTEA FRAȚIONARĂ

Definiții:

Partea întreagă a unui număr real x este cel mai mic număr întreg cel mult egal cu numărul x și se notează $[x]$.

Partea fracționară a lui x se notează $\{x\}$ și $\{x\} = x - [x]$.

Proprietăți:

- $[x] = x \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$;
- $\{x\} = 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$;
- $[m+x] = m + [x]$, $\forall m \in \mathbb{Z}$;
- $\{m+x\} = \{x\}$, $\forall m \in \mathbb{Z}$;
- $x-1 < [x] \leq x < [x]+1$;
- $[x] + \left[x + \frac{1}{n}\right] + \dots + \left[x + \frac{n-1}{n}\right] = [nx]$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$ (Hermite).



INEGALITĂȚI REMARCABILE

- Dacă $a \cdot b > 0$, atunci $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$.
- $x \cdot y \leq \frac{(x+y)^2}{4}$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$;

- $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$, $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$;
- $3 \cdot (xy + yx + zx) \leq (x + y + z)^2 \leq 3 \cdot (x^2 + y^2 + z^2)$.

Inegalitatea mediilor

(adevărată pentru numere strict pozitive)

$\min(a_k) \leq m_h \leq m_g \leq m_a \leq m_p \leq \max(a_k)$, unde

$$m_h = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = \frac{n}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}} \quad (\text{media armonică}),$$

$$m_g = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n a_k} \quad (\text{media geometrică}),$$

$$m_a = \frac{p_1 a_1 + p_2 a_2 + \dots + p_n a_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} = \frac{\sum_{k=1}^n a_k}{n} \quad (\text{media aritmetică}),$$

$$m_p = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^n a_k^2}{n}} \quad (\text{media pătratică}).$$

Inegalitatea Cauchy-Buniakovsky-Schwarz

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + \dots + a_n^2) \cdot (b_1^2 + \dots + b_n^2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \leq \sum_{i=1}^n a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n b_i^2$$

Inegalitatea lui Minkowski

$$\sqrt{(x+y)^2 + (a+b)^2} \leq \sqrt{x^2 + a^2} + \sqrt{y^2 + b^2}$$

Inegalitatea lui Cebîșev

Dacă $(a_k)_{k \geq 1}$, $(b_k)_{k \geq 1}$ sunt două șiruri la fel ordonate, atunci

$$\sum_{k=1}^n a_k \cdot \sum_{k=1}^n b_k \leq n \cdot \sum_{k=1}^n (a_k \cdot b_k),$$

iar dacă (a_k) , (b_k) sunt două șiruri invers ordonate, atunci

$$\sum_{k=1}^n a_k \cdot \sum_{k=1}^n b_k \geq n \cdot \sum_{k=1}^n (a_k \cdot b_k).$$

Inegalitatea lui Bernoulli

$$(1+\alpha)^r \geq 1+r\alpha, \quad \forall \alpha, r \in \mathbb{R}, \alpha \geq -1, r \geq 0$$



ELEMENTE DE LOGICĂ MATEMATICĂ, MULȚIMI

- Se numește propoziție, în sensul logicii matematice, un enunț care, într-un context dat, este fie adevărat, fie fals.

Valoare de adevăr, tabele de adevăr

p	q	$\neg p$	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	0
0	1	1	1	0	1	0
0	0	1	0	0	1	1

- Se numește predicat un enunț care depinde de una sau mai multe variabile și care devine propoziție oricum am înlocui variabilele cu valori alese dintr-o mulțime.